*Sistem linearnih jednačina sa dvije jednačine i dvije promjenljive*

Sistem od dvije linearne jednačine sa dvije promjenljive je sistem oblika:

pri čemu je bar jedan od koeficijenata uz x ili y, u svakoj od jednačina, različit od nule. Realne brojeve nazivamo koeficijentima sistema.

Rješenje sistema je uređeni par brojeva koji je rješenje svake od jednačina sistema:

Ako u zadatku nije dat sistem u opštem obliku, potrebno ga je ekvivalentnim transformacijama svesti na taj oblik, (u tom smislu, treba obratiti pažnju da se iste nepoznate uvijek pišu jedne ispod drugih radi preglednosti i lakšeg snalaženja u sistemu). Evo nekih od tih transformacija:

* Zamjena mjesta jednačina.
* Pomnožiti ili podijeliti, brojem (izrazom) različitim od nule jednu jednačinu sistema i dodati je drugoj jednačini sistema.
* Zamjena jedne jednačine ekvivalentnom jednačinom.

Primjeri sistema jednačina sa dvije nepoznate,

 ;

Primjer: Provjeri da li je a=3 i b=4 rješenje sistema

Zamjenom a=3 i b=4 uočavamo da date jednakosti postaju tačne.

Primijetimo da je a=4 , b=3 takođe rješenje ovog sistema. Rješenja zapisujemo kao uređene parove :

Jednačina x-y=9

Sistemi jednačina kod kojih postoji samo jedno rješenje (tj. jedan uređeni par rješenja) nazivaju se saglasni i određeni sistemi. Osim njih postoje i neodređeni sistemi (sistemi koji imaju beskonačno mnogo rješenja) i nesaglasni (nemogući), tj.sistemi koji nemaju rješenja.
Metode za rješavanje sistema linearnih jednačina su:

* Metoda zamjene promjenljivih,
* Metoda eliminacije promjenljivih (Gausova metoda),
* Grafička metoda
* Metoda determinanti (Kramerovo pravilo),

**Metoda zamjene promjenljivih** sastoji se u sljedećem: izabrati jednu od dvije date jednačine i iz nje izraziti jednu od nepoznatih preko druge nepoznate, a zatim tu nepoznatu u drugoj jednačini zamijeniti dobijenim izrazom. Na taj način dobija se jedna jednačina sa jednom nepoznatom.

**Metoda eliminacije promjenljivih ili Gausova metoda** sastoji se u sljedećem. Jednačine sistema se množe brojevima različitim od nule tako da se poslije sabiranja dobija jednačina sa jednom promjenljivom. Zapravo, dobija se ekvivalentan sistem u kojem je jedna jednačina sa jednom promjenljivom. Kada se nađe jedno rješenje, treba se vratiti u jednu od jednačina sistema da bi se našlo drugo rješenje.

Zadatak 1 . Riješi sistem (metoda suprotnih koeficijenata) :

Koeficijenti uz y su suprotni . Sabiranjem lijevih i desnih strana jednačine dobijemo novu jednačinu u kojoj je nepoznata y nestaje. Toj novoj jednačini pridržujemo bilo koju od date dvije.

 Zamjenom x =1 u gornju jednačinu

Rješenje sistema je (x,y) = (1,3)

Primjer 1. Riješi sistem (metoda zamjene ) :

 Rješenje sistema je: (1,3).

Primjer 2. Riješiti sistem (Gausova metoda):

Rješenje:

 Prva jednačina se množi sa 2 i dodaje drugoj.

 Prva jednačina se prepisuje, rješava se druga jednačina.

Kada se nađe jedno rješenje, treba se vratiti u jednu jednačinu (bilo koju) da bi se našlo drugo rješenje.

Rješenje sistema jednačina je uređeni par brojeva: (*x*, *y*) = (5, 8).

Primjer 3. Riješiti sistem (Gausova metoda):

 Prva jednačina množi se sa −2 i dodaje drugoj.

To znači da je sistem jednačina neodređen, odnosno da ima beskonačno mnogo rješenja. Da bi se ta rješenja opisala, iz jedne od jednačina treba izraziti *x* ili *y*, zavisno od toga šta je lakše.

5*x* + *y* = −1

*y* = −1 − 5*x*

Dakle, rešenja su: (*x*, *y*) = (*x*, −1 − 5*x*);  *x* ∈ *R*.

Primjer 4: Riješiti sistem:

 Jednačine se sabiraju.

Druga jednačina sistema je nemoguća tj. sistem nema rješenja.

**Grafička metoda:** Svakoj jednačini sistema odgovara neka prava u ravni Oxy. Dvije prave u ravni se mogu sjeći u jednoj tački (sistem ima jedinstveno rješenje, rješenje će biti koordinate tačke presjeka pravih), nemati zajedničkih tačaka ( sistem nema rješenje) ili se poklapati ( sistem ima beskonačno mnogo rješenja, rješenja će biti koordinate proizvoljne tačke prave).

Primjer 5. Riješiti sisteme grafičkom metodom:

a)

Grafički, rješenje sistema je tačka presjeka odgovarajućih pravih.





 b)

Nacrtati prave:

g: y = x+1

f: y = x1

 Dati sistem nema rješenja.

Prave su paralelne, tj. nemaju zajedničkih tačaka.



 c)

 Nacrtati prave:

 x+y = 2 (f)

 2x+2y = 4 (g)

 Prave se poklapaju, sistem ima

 beskonačno mnogo rješenja. Rješenja su koordinate

 proizvoljne tačke sa prave

 čija je jednačina:

Domaći:

1. Metodom zamjene riješiti sistem :
2. Gausovom metodom riješiti sisteme jednačina:
3.

1. Grafičkom metodom riješiti sistem:

**Determinanta; metoda determinanti**

Determinanta drugog reda je kvadratna šema oblika kojoj se pridružuje realan broj

Brojevi zovu se elementi determinante i poređani su u vrste i kolone.

Prvu vrstu čine brojevi , a drugu

Prvu kolonu čine brojevi , a drugu

Primjer 1 :

Primjer 2:

 Rješenje sistema  izraženo pomoću determinanti glasi:

gdje je dato sa :

Zadatak 1. Metodom determinanti riješiti sistem:

Rješenje **:** Najprije odredimo redom determinante

 =

Rješenje sistema je uređeni par

Kramerova pravila

Neka je dat sistem od dvije linearne jednačine sa dvije nepoznate:

Formiramo determinantu sistema D kao i determinante i :

* Ako je tada sistem ima jedinstveno rješenje (x,y) i ono je:
* Ako je tada sistem ima beskonačno mnogo rješenja.
* Ako je tada sistem nema rješenja.

Zadatak 2. Riješiti sistem:

Rješenje: Jedna jednačina u sistemu ima parametar m. Sistem rješavamo metodom determinanti . Najprije odredimo redom determinante

 = 1

1. Razmotrimo slučaj kada je

 , tada

1. to jest sistem postaje , odnosno rješavajući ga metodom jednakih koeficijenata (oduzimamo drugu od prve , a jednu prepisujemo ) dobijemo : . Druga jednačina je nemoguća, nema rješenja, pa ni sistem nema rješenja.

Rješenje sistema je uređeni par
 za

Za sistem je nemoguć

Domaći:

1. Metodom determinanti riješiti sisteme jednačina:

1. U zavisnosti od realnog parametra m diskutovati rješenja sistema jednačina: