Osnovne trigonometrijske jednačine

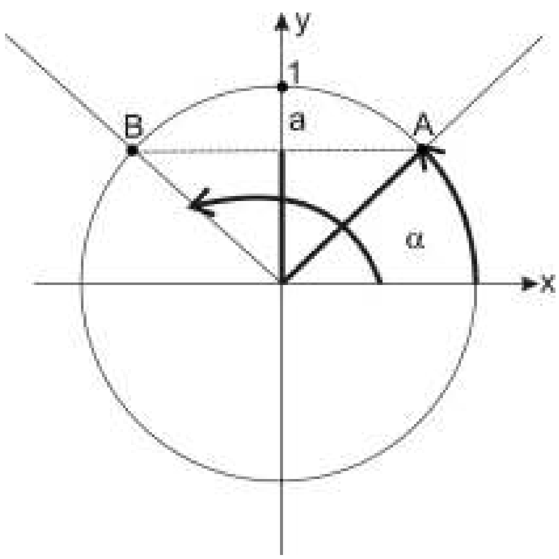
1. sinx = a

Ova jednačina ima rešenja ako je $-1 \leq a \leq 1$ zbog ograničenosti sinusne funkcije izmedju -1 i 1.
Da bi lakše razumeli kako se rešavaju ove jednačine, posmatraćemo sledeće situacije:

i) $0 < a < 1$
ii) $-1 < a < 0$
iii) $a = 0$
iv) $a = 1$
v) $a = -1$

i) $\sin x = a \quad 0 < a < 1$

Postupak: Nadjemo vrednost ***a*** na y-osi i povučemo pravu $y = a$ Ona seče trigonometrijski krug (tačke A i B) i spojimo sa kordinatnim početkom. Dobili smo dva tražena ugla: (α) i $(\pi - \alpha)$. Evo slike:



Rešenja zapisujemo:

$$x_1 = \alpha + 2k\pi$$
$$x_2 = (\pi - \alpha) + 2k\pi$$
$$k \in z$$

PAZI:

$2k\pi$ dodajemo zbog periodičnosti funkcije $\sin x$, koja je $2\pi = 360^0$, to je obavezno!

Rešenje se (kad postanete iskusni) može sjediniti i u jedno rešenje:

$$x_k = (-1)^k \alpha + k\pi \quad k \in z$$

Primer:

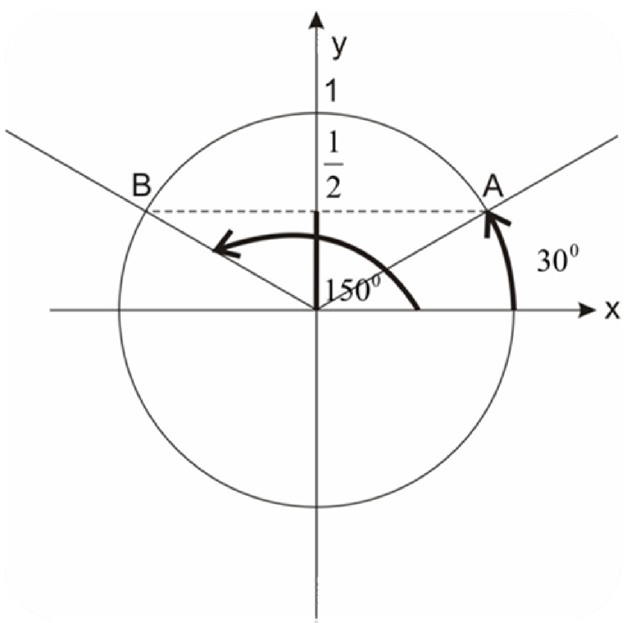
Rešiti jednačinu: $\sin x = \frac{1}{2}$

Rešenje: Prvo nacrtamo trigonometrijski krug. Nadjemo na y-osi vrednost $\frac{1}{2}$ i povučemo pravu $y = \frac{1}{2}$, paralelnu sa x-osom. Ta prava seče trigonometrijski krug u tačkama A i B. Te tačke spajamo sa koordinatnim početkom i dobili smo tražene uglove.

Iz **tablice** (ko zna) vidimo da su traženi uglovi:

$$\alpha_1 = 30^0 = \frac{\pi}{6}$$
$$\alpha_2 = 150^0 = \frac{5\pi}{6}$$

Evo slike:



Rešenja su:

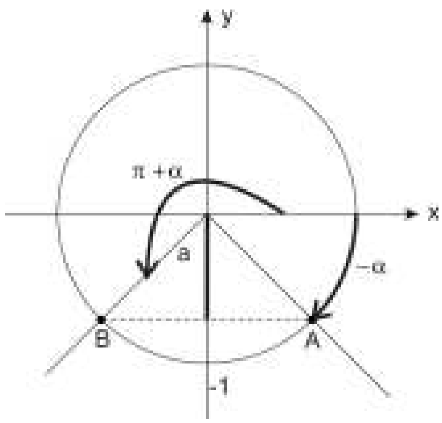
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$
$$k \in z$$

Ili zajedno: $x_k = (-1)\frac{\pi}{6} + k\pi$

ii) $\sin x = a$ $\quad -1 < a < 0$

Postupak je sličan kao malopre. Nadjemo vrednost a na y-osi (**pazi**: sad je a negativno pa je ispod x-ose), povučemo pravu paralelnu sa x-osom. Mesta gde prava y=a seče trigonometrijski krug (A i B) spojimo sa koordinatnim početkom i dobili smo traženе uglove: $(-\alpha)$ i $(\pi + \alpha)$

Na slici to izgleda:



Rešenja su:

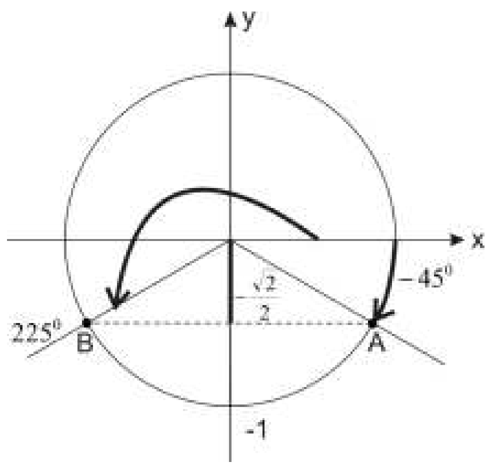
$x_1 = -\alpha + 2k\pi$

$x_2 = (\pi + \alpha) + 2k\pi$

$k \in z$

<u>Primer:</u>

Reši jednačinu: $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$-45^0 = -\frac{\pi}{4}$

$225^0 = \frac{5\pi}{4}$

<u>Rešenja su:</u>

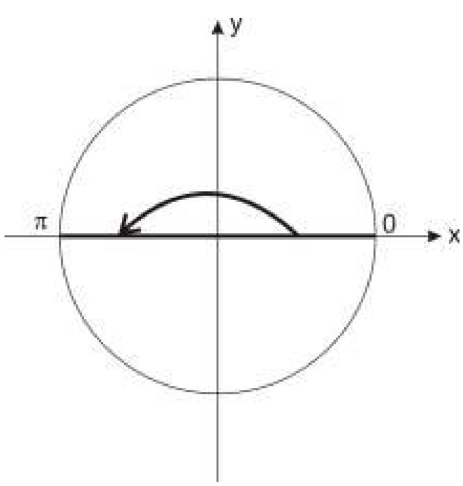
$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

$k \in Z$

Naravno, ovo negativno rešenje $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ možemo napisati i kao $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ ali je običaj da se uglovi u IV kvadrantu pišu kao negativni

iii) $\sin x = 0$



Sinusi su jednaki nuli za uglove od 0^0 **i** 180^0

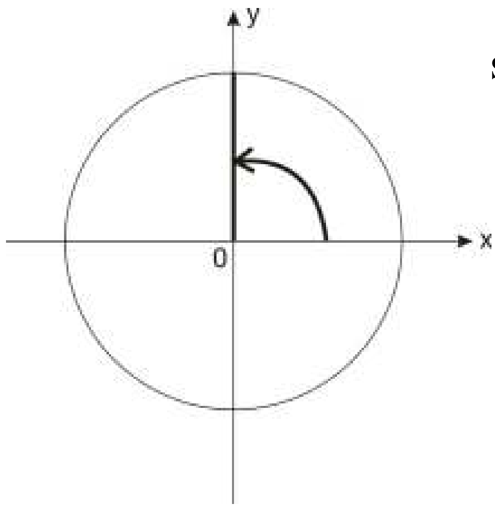
$x = 0 + 2k\pi$

$x = \pi + 2k\pi$

$k \in Z$

Ili zajedno: $x = k\pi \quad k \in Z$

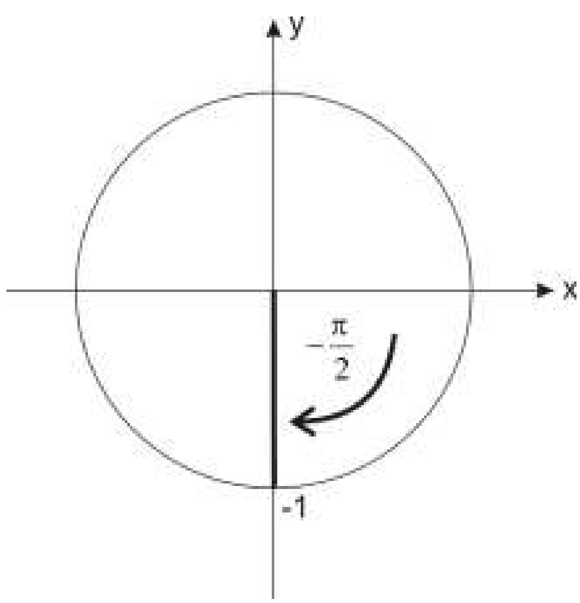
iv) $\sin x = 1$



Sinus ima vrednost 1 za ugao od 90^0

Ovde imamo samo jedno rešenje: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in Z$

v) $\sin x = -1$



$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in Z$$

Ili možemo zapisati preko pozitivnog ugla:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in Z$$

2. $\cos x = b$

Kao i kod $\sin x = a$ i ovde mora biti $-1 \le b \le 1$ da bi jednačina imala rešenja.
I ovde ćemo rasčlaniti problem:

i) $0 < b < 1$
ii) $-1 < b < 0$
iii) $b = 0$
iv) $b = 1$
v) $b = -1$

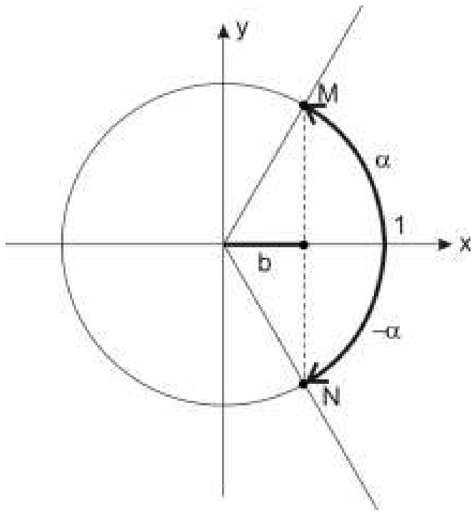
i) $\cos x = b \qquad 0 < b < 1$

Ovi uglovi se nalaze u I i IV kvadrantu.

Postupak:

Na x-osi nadjemo vrednost b. Povučemo pravu paralelnu sa y-osom. Ta prava seče

trigonometrijski krug u tačkama M i N. Spojimo te tačke sa koordinatnim početkom i dobili smotražene uglove: α i $(-\alpha)$



Rešenja su:

$x = \alpha + 2k\pi$

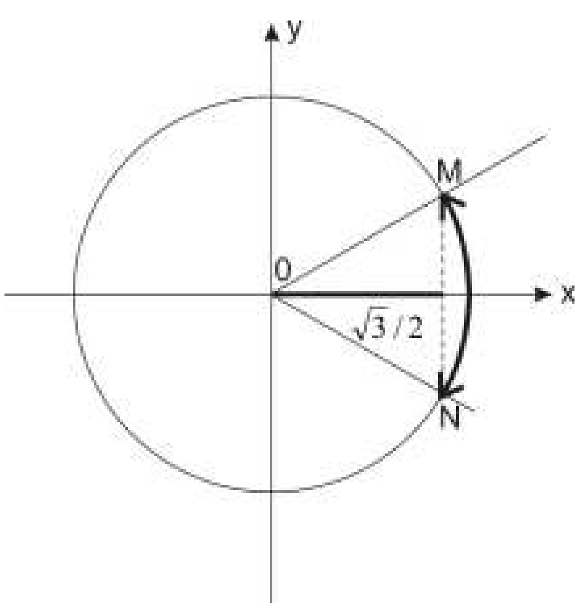
$x = -\alpha + 2k\pi$

$k \in Z$

Ugao α odredimo iz tablica ili konstruktivno.

Primer:

Reši jednačinu: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Rešenja su:

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \; k \in Z$

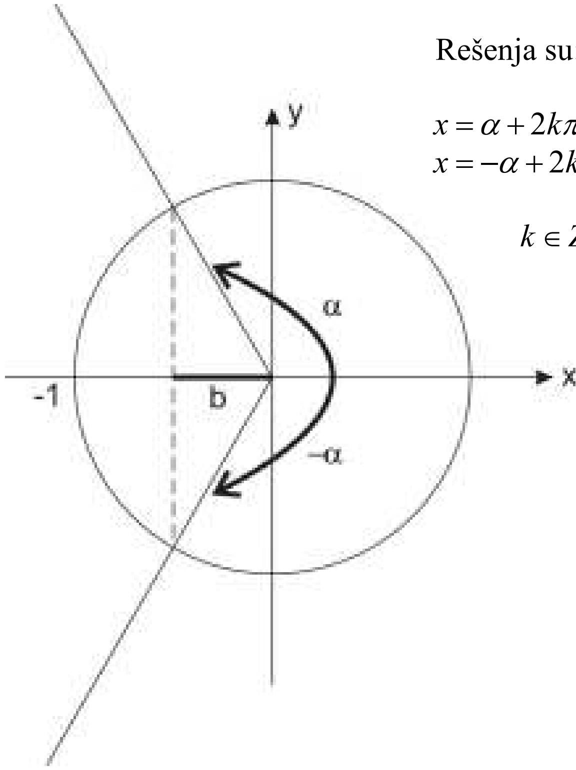
$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \; k \in Z$

Jer je $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

To jest $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ii) $\cos x = b \quad -1 < b < 0$

Ovi uglovi se nalaze u II i III kvadrantu. Postupak je isti, samo je b negativno!



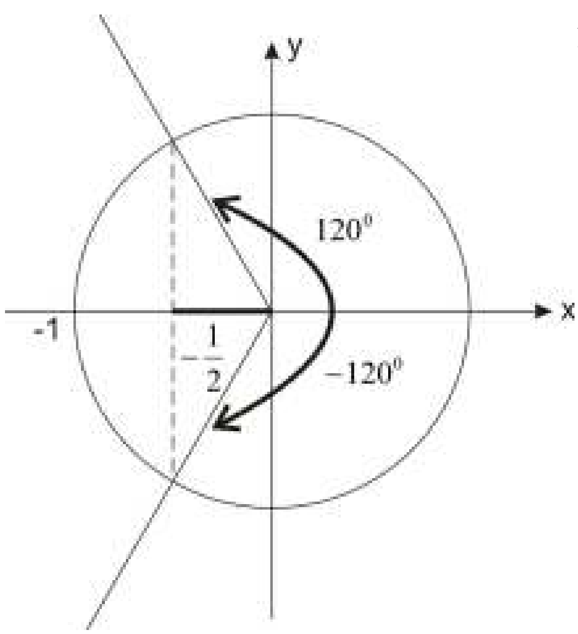
Rešenja su:

$$x = \alpha + 2k\pi$$
$$x = -\alpha + 2k\pi$$

$$k \in Z$$

Primer:

Reši jednačinu $\cos x = -\frac{1}{2}$



$$120^0 = \frac{2\pi}{3}$$

Rešenja su:

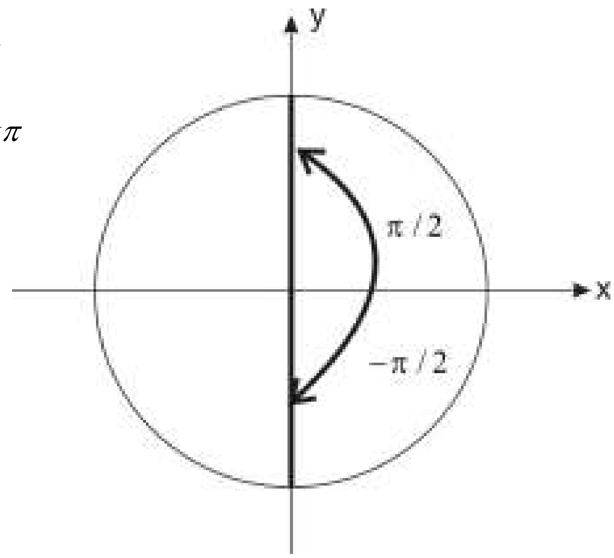
$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$
$$k \in Z$$

iii) $\cos x = 0$

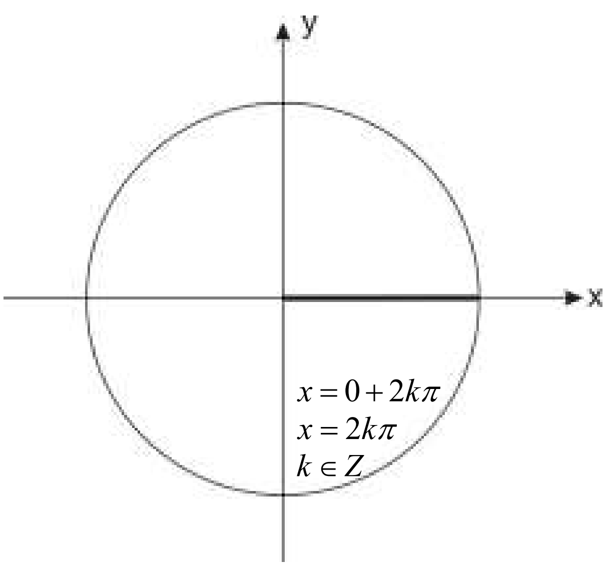
$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$k \in Z$



iv) $\cos x = 1$

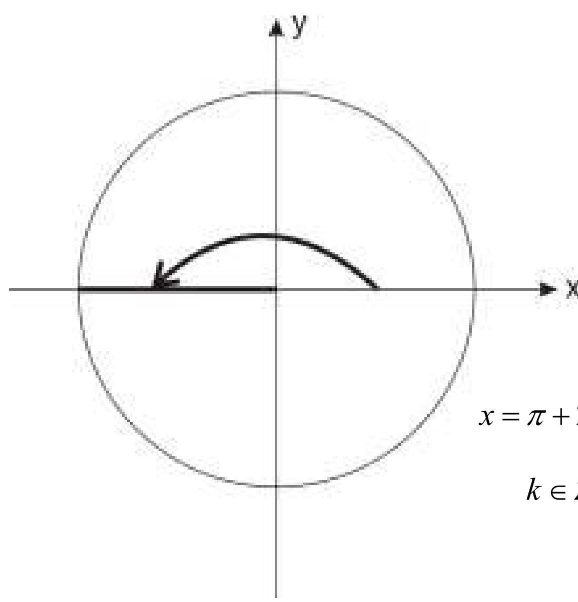


$x = 0 + 2k\pi$

$x = 2k\pi$

$k \in Z$

v) $\cos x = -1$



$x = \pi + 2k\pi$

$k \in Z$

3. $tgx = m$

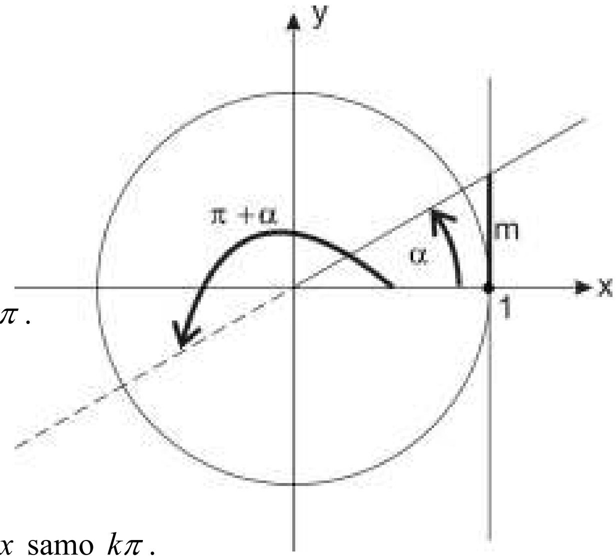
Za razliku od prethodne dve, jednačina $tgx = m$ ima rešenja za $\forall m \in (-\infty, \infty)$. Razmotrićemo dve situacije: $m > 0$ i $m < 0$

i) $tgx = m \quad m > 0$

To su uglovi u I i III kvadrantu!

Postupak: Na tangesnoj osi nadjemo m i to spojimo sa koordinatnim početkom. Dobili smo ugao α. Produžimo taj ugao u III kvadrant i evo drugog rešenja: $\pi+\alpha$

Rešenje je:



$x=\alpha+k\pi$
$k\in z$

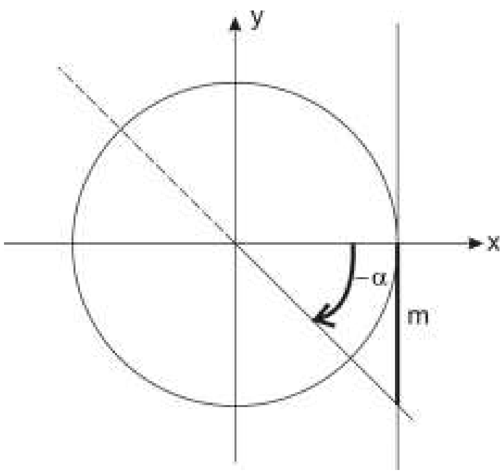
Zašto samo jedno rešenje?

Zato što je tgx kao i $ctgx$ periodična funkcija sa periodom π.
Pa kad stavimo $k\pi$ mi smo to rešenje već opisali!

Zapamti: Kod $\sin x$ i $\cos x$ je perioda $2k\pi$ a kod tgx i $ctgx$ samo $k\pi$.

ii) $tgx=m \quad m<0$

Ovi uglovi su u II I IV kvadrantu! Postupak je potpuno isti.



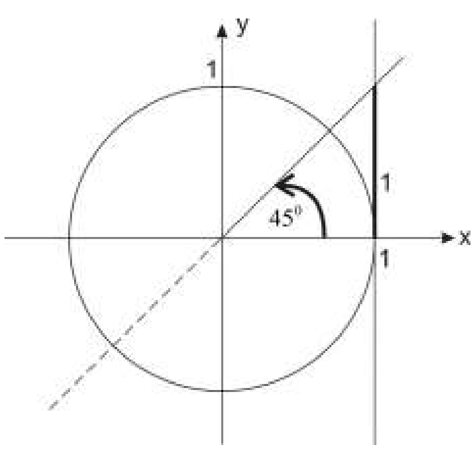
Rešenje:

$x=-\alpha+k\pi$
$k\in Z$

Primer 1.

Reši jednačinu: $tgx=1$

Rešenje: (iz tablice znamo: $tgx45^0=1$)



$45^0=\dfrac{\pi}{4}$

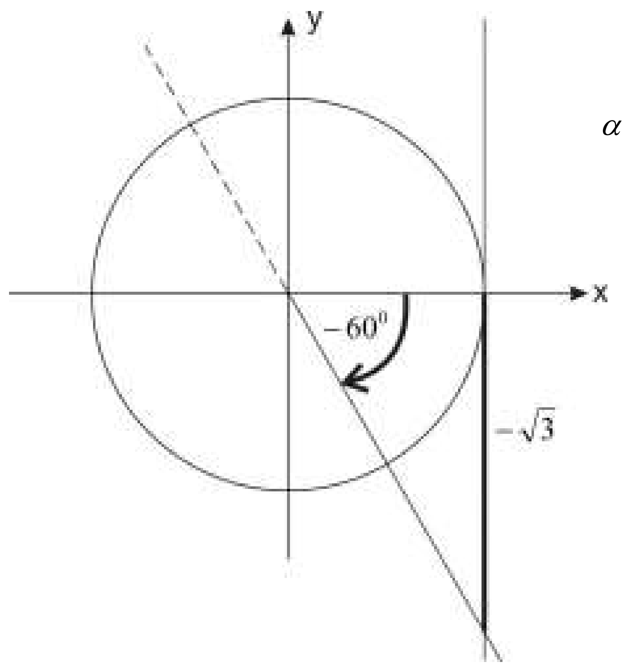
$x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$
$k\in Z$

Primer 2.

Reši jednačinu: $tgx = -\sqrt{3}$

Rešenje: Iz tablice je $tg60^0 = +\sqrt{3}$, pa je onda $tg(-60^0) = -\sqrt{3}$ jer je $tg(-\alpha) = -tg\alpha$

Crtamo sliku:



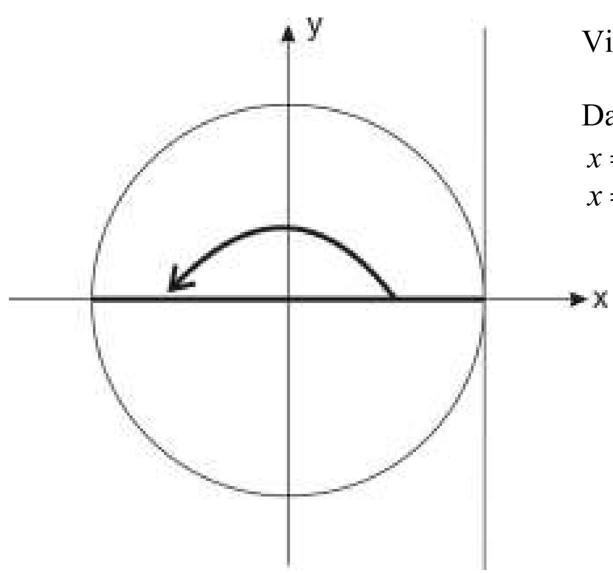
Dakle:

$$\alpha = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$k \in Z$$

Primer 3.

Reši jednačinu: $tgx = 0$



Vidimo da su to uglovi od 0^0 i 180^0

Dakle:

$x = 0^0 + k\pi$

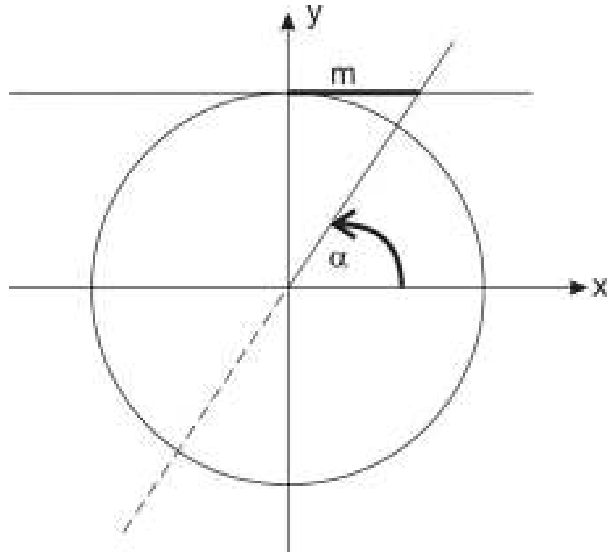
$x = k\pi$

$k \in Z$

4. $ctgx = m$

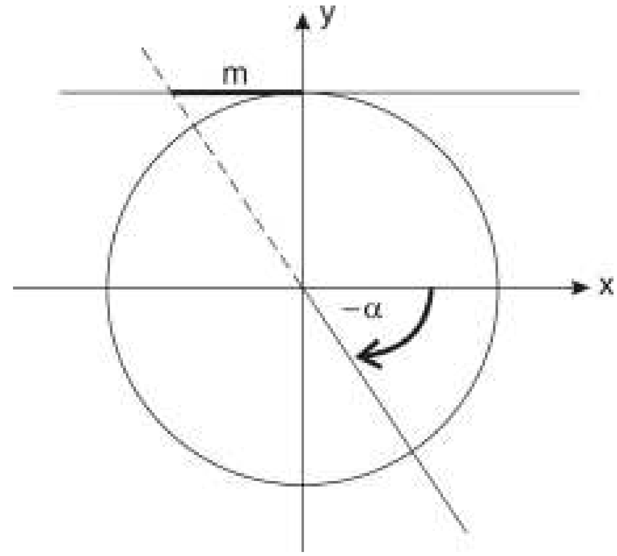
Kao i za tgx rešenja su iz celog skupa R. Perioda je $k\pi$. Postupak rešavanja je sličan, samo što vrednost za ctgx tražimo na kotangensnoj osi

$ctgx = m$ $\quad m > 0$



Uglovi su u I i III kvadrantu.
Rešenje: $x = \alpha + k\pi$
$k \in Z$

$ctgx = m$ $\quad m < 0$



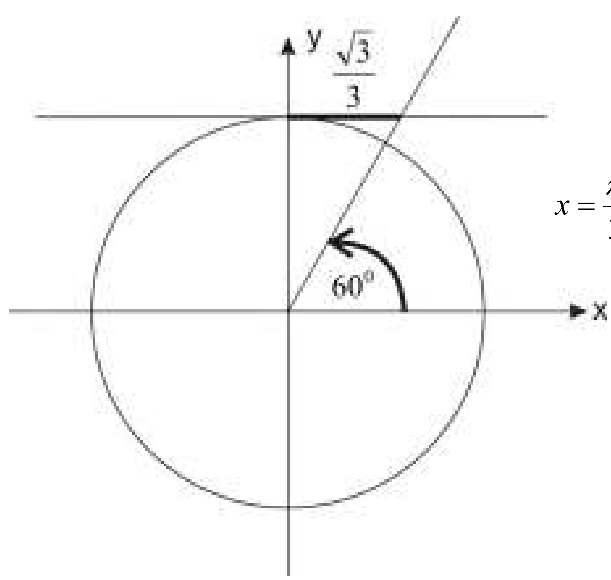
Uglovi su u II i IV kvadrantu.
Rešenje: $x = -\alpha + k\pi$
$k \in Z$

Najpre potražimo vrednost u tablici, vidimo koji je ugao u pitanju i nacrtamo sliku.

<u>Primer 1.</u>

Reši jednačinu: $ctgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$

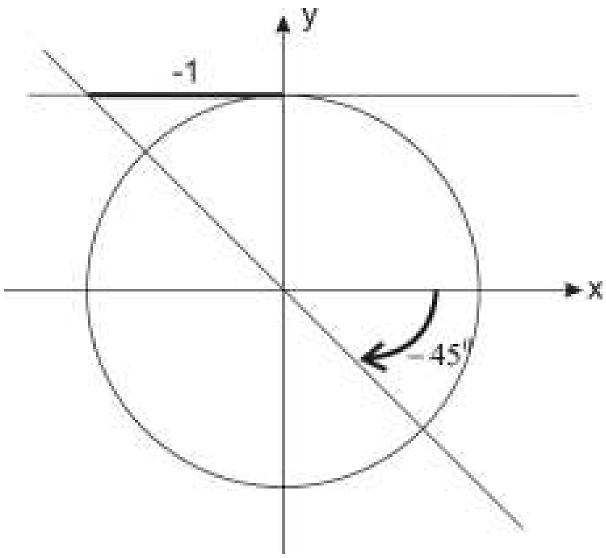
Rešenje: iz tablice vidimo vrednost za 60^0



$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad k \in Z$

Primer2.

Reši jednačinu: $ctgx = -1$



$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

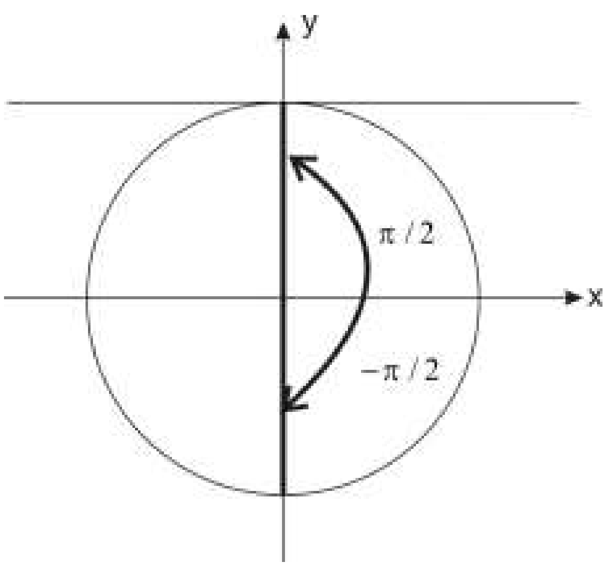
A može i:

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

$$k \in Z$$

Primer 3.

Rešiti jednačinu: $ctgx = 0$



$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$k \in Z$$

Zadaci

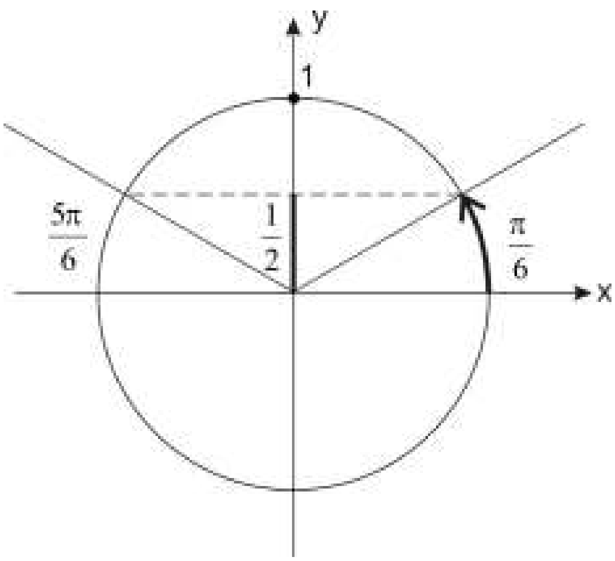
1) Reši jednačine:

a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

Rešenje:

a) Jednačinu rešavamo normalno , kao da je sinx.(al pišemo 2x u rešenju…)
Iz tablice vidimo da je jedan traženi ugao 30^0



Pazi sad:

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Sada izrazimo *x,* odnosno sve podelimo sa 2

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{ili} \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

$$k \in Z$$

b) Isto rešavamo kao da je $\sin x = 0$ ali posle ne pišemo $x = \ldots$. Nego $x - \frac{\pi}{3} = \ldots$ pa izračunamo!

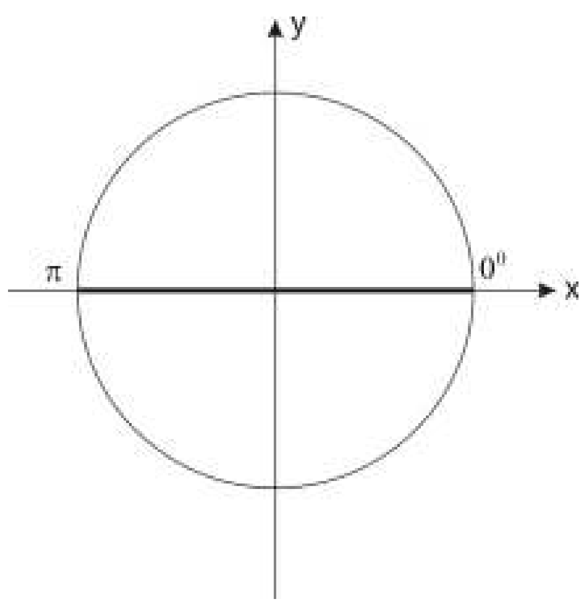
Dakle:

$$x - \frac{\pi}{3} = 0 + 2k\pi \quad \text{ili} \quad x - \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k \in Z \qquad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k \in Z$$

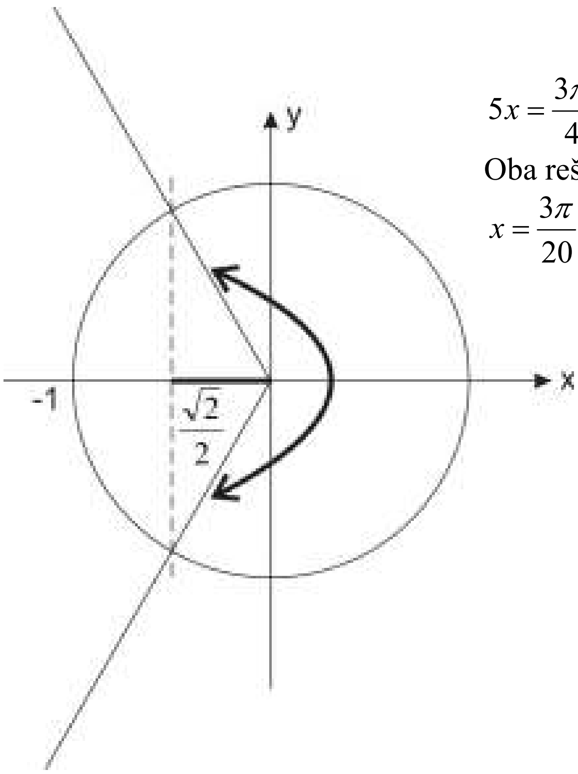


2) Reši jednačine:

a) $\cos 5x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

Rešenje: $\cos 5x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$5x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ili $5x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

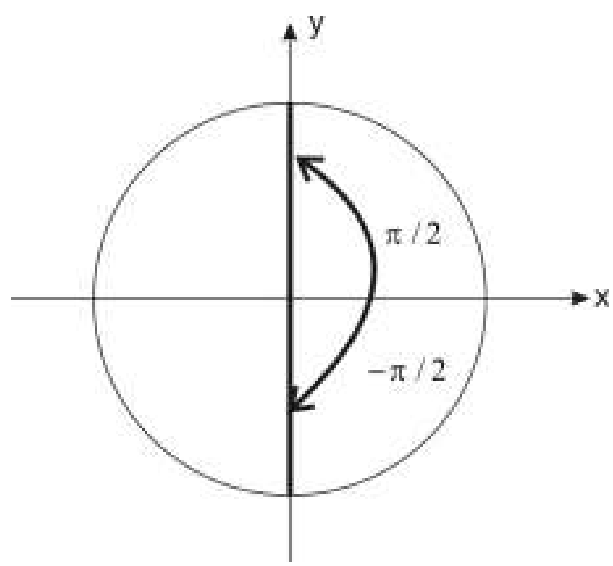
Oba rešenja podelimo sa 5

$x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}$ ili $x = -\frac{3\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}$

$k \in Z$ $k \in Z$

b)

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$



$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ili $2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $2x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$2x = \frac{4\pi}{6} + 2k\pi$ $2x = \frac{-2\pi}{6} + 2k\pi$

$2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ $2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

$k \in Z$ $k \in Z$

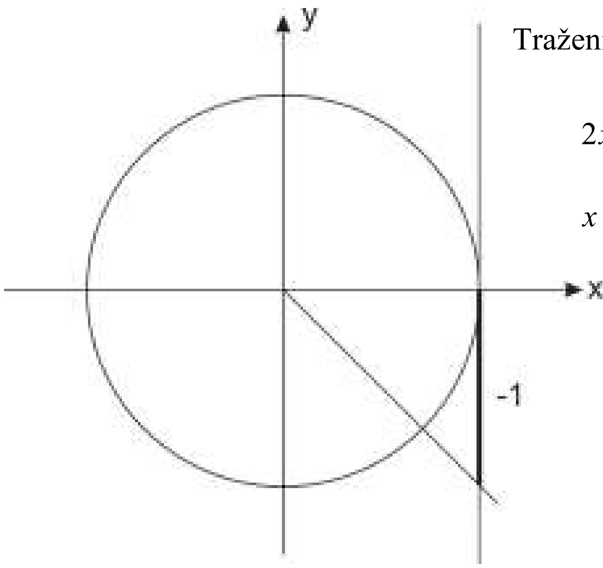
3) Rešiti jednačine:

a) $tg2x = -1$

b) $tg\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$

Rešenje:

a) $tg2x = -1$



Traženi ugao je -45^0

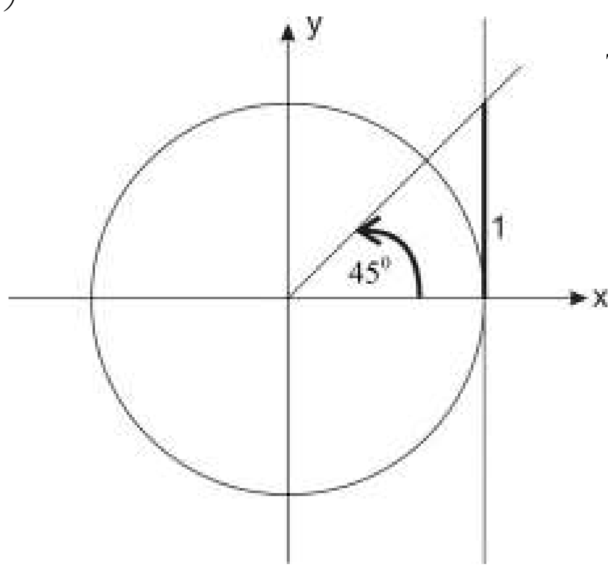
Dakle:

$$2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

$$k \in Z$$

b) $tg\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$



Traženi ugao (iz tablice) je $45^0 = \frac{\pi}{4}$

$$3x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$3x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$$

$$k \in Z$$

4) Rešiti jednačine:

a) $ctg3x = 1$

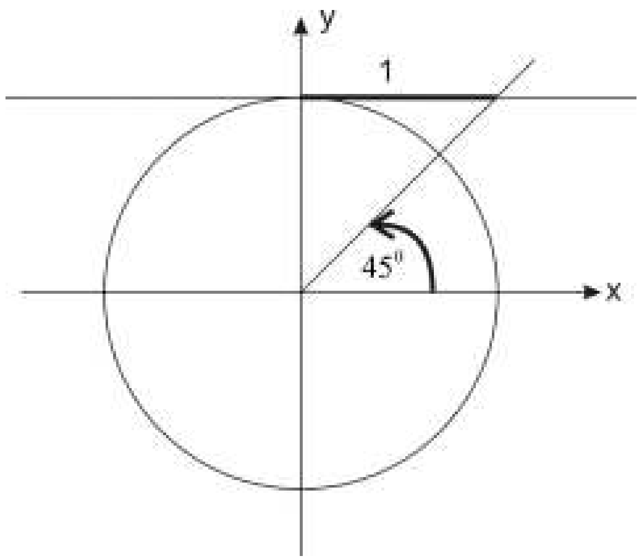
b) $ctg\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

Rešenje:

a) $ctg3x = 1$ Iz tablice vidimo da je traženi ugao 45^0

Dakle:

$$3x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$
$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$$
$$k \in Z$$



b) $ctg\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

Traženi ugao je 30^0

$$x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi$$
$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$x = \frac{4\pi}{6} + k\pi$$
$$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$
$$k \in Z$$